SERIES NUMÉRICAS

Patrones & Relaciones

Yasser A. Chavez

$$(1^p)(2^p) + (3^p)(4^p) + (5^p)(6^p) + \ ... \ + ((\text{n-1})^p)(n^p)$$

Series Numéricas

Patrones & Relaciones

Para María Esther

Contenidos

Prefacio

Este libro nace del extenso trabajo que he realizado durante meses al adentrarme en las series numéricas enteras, observándolas desde la perspectiva de patrones y relaciones. Estos esfuerzos culminaron en publicaciones en la OeisWiki. También, debido al amor que siempre he sentido por cualquier medio de transmisión de contenido matemático, como documentales, videos y libros, así que me decidí por escribir un libro. Ya tenía la mitad del trabajo hecho, solo necesitaba recopilar todas mis notas de mis libretas, ordenarlas y plasmarlas en la presente obra. De esta manera, puedo aportar mi granito de arena e invitarlos a dejar de ver las matemáticas como una simple herramienta para hacer compras o sentir rechazo debido a su mala fama. Mi principal objetivo es avivar la curiosidad innata por las matemáticas que todos poseemos. Es posible que esta curiosidad se haya atenuado debido al enfoque convencional que las escuelas suelen adoptar en la enseñanza de las matemáticas. Aunque este libro trata sobre matemáticas, no puedo transmitir solo con números lo que han significado para mí en los últimos meses. Por lo tanto, esta obra los guiará a través de una narrativa que espero pueda transmitir todo aquello que sentí cuando me encontraba frente a una hoja llena de números, que perfectamente podría estar enmarcada en algún museo de arte abstracto.

El contenido del libro se centra en secuencias numéricas, estudiando sus propiedades y relaciones con otras secuencias numéricas. Nos ayudamos de estas para dar solución a problemas que involucren sumas finitas de términos, como pueden ser la suma de cuartas potencias, la suma de productos de números pares consecutivos, la suma de números triangulares con índice impar, entre otras. Proporcionando una teoría que permite al lector abordar estos temas de una manera que pueda razonar y entender el desarrollo que se hace hasta llegar a una fórmula cerrada.

Introducción

En esta sección, se presentara los conceptos y temas fundamentales necesarios para comprender plenamente la obra. Estos prerrequisitos son esenciales para establecer una base solida y facilitar la comprensión de los temas mas avanzados que se abordaran a lo largo del libro.

En toda la totalidad de la obra el trabajo esta centrado en el conjunto de los Números Enteros denotado por Z

Números Enteros

$$\mathrm{Z} = \ldots, \text{-8}, \text{-7}, \text{-6}, \text{-5}, \text{-4}, \text{-3}, \text{-2}, \text{-1}, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$$

El conjunto de los Números Enteros como se puede observar esta conformado por los números negativos, el 0 y por los números positivos.

Clasificación de Números Enteros

Números Impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11,…
Números Pares: 0, 2, 4, 6, 8, 10,…
Números Primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13,...
Números compuestos: 4, 6, 8, 9, 10, 12,...

Observación: Los tres puntos denotan que hay una regla clara que siguen los números y se extienden indefinidamente.

Operaciones Fundamentales

Suma

La operación suma, denotada por el símbolo ($+$), es una operación binaria; es decir, se necesitan dos números para poder operar.

Ejemplos:

$$1 + 2 = 3 \qquad 3 + 7 = 10 \qquad \text{-4} + 5 = 1 \qquad \text{-4} + (\text{-4}) = \text{-8}$$
$$0 + 5 = 5 \qquad 3 + (\text{-3}) = 0 \qquad \text{-6} + 2 = \text{-4} \qquad \text{-2} + 0 = \text{-2}$$

Resta

La operación resta, denotada por el símbolo (-), es una operación binaria; es decir, se necesitan dos números para poder operar.

Ejemplos:

$1 - 3 = -2$ $\quad 3 - 7 = -4$ $\quad -4 - 5 = -9$ $\quad -4 - 4 = -8$

$0 - 5 = -5$ $\quad 7 - 3 = 4$ $\quad -6 - 2 = -8$ $\quad -2 - 0 = -2$

Multiplicación

La operación multiplicación, denotada por el símbolo ($\times$), es una operación binaria; es decir, se necesitan dos números para poder operar.

Ejemplos:

$1 \times 3 = 3$ $\quad 3 \times 7 = 21$ $\quad 6 \times (-4) = -24$ $\quad -2 \times (-2) = 4$

$0 \times 5 = 0$ $\quad 0 \times 0 = 0$ $\quad 23 \times 10 = 230$ $\quad 2 \times 3 = 6$

División

La operación división, denotada por el símbolo ($\div$), es una operación binaria; es decir, se necesitan dos números para poder operar.

Ejemplos:

$1 \div 1 = 1$ $\quad 4 \div 2 = 2$ $\quad -5 \div 5 = -1$ $\quad 30 \div 3 = 10$

$3 \div 1 = 3$ $\quad 0 \div 1 = 0$ $\quad -2 \div (-2) = 2$ $\quad 25 \div 1 = 25$

división en productos

$[3 \times 2] \div 2 = 3$ $\qquad [3 \times (2 \times 2)] \div 2 = 3 \times 2$ $\qquad [5 \times 20] \div 40 = 5 \div 2$

Observación: Recordemos que al multiplicar y dividir dos números con el mismo signo, el resultado siempre es positivo.
La división por 0 no esta definida.

Operaciones Especiales

Las Operaciones Especiales son aquellas que requieren un grado mayor de abstracción que las fundamentales. Estas abarcan los factoriales, la suma de exponentes y la multiplicación de exponentes.

Factorial

El factorial de un número es el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta ese número.

Ejemplos:

$$1! = 1 \qquad 2! = 1 \times 2 = 2 \qquad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$
$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \qquad 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

Exponentes

El exponente de un número indica cuántas veces se multiplica la base por sí misma.

Ejemplos:

$$1^2 = 1 \times 1 = 1 \quad 2^1 = 2 \quad 2^2 = 2 \times 2 = 4 \quad 3^2 = 3 \times 3 = 9$$
$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 16 \times 4 = 64 \qquad 5^2 = 5 \times 5 = 25$$

Observación: El 1 elevado a cualquier exponente siempre da como resultado 1.

Suma de Exponentes

Solo se suman los exponentes cuando multiplicamos dos números donde la bases son iguales.

Ejemplos:

$$1^1 \times 1^2 = 1^{1+2} = 1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$
$$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$
$$5^3 \times 5^1 = 5^{3+1} = 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$
$$3^1 \times 3^1 = 3^{1+1} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$$
$$4^3 \times 4^2 = 4^{3+2} = 4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$$

Multiplicación de Exponentes

Solo multiplicamos exponentes cuando tengamos un exponente que opere sobre otro exponente.

Ejemplos:

$$(1^1)^1 = 1^{1\times1} = 1^1 = 1 \quad (2^2)^2 = 2^{2\times2} = 2^4 = 16$$
$$(3^1)^3 = 3^{1\times3} = 3^3 = 27 \quad (5^2)^1 = 5^{2\times1} = 5^2 = 25$$

Observación: Recordemos que los (), [] y {} sirven para agrupar y dar un orden a las operaciones.

Notación Variable

Los números son de mucha ayuda a la hora de hacer cálculos concretos, pero por sí mismos no pueden dar soluciones a problemas donde se busca generalizar y ser más eficientes al hacer cálculos. Las variables suelen representarse con letras, generalmente las últimas del abecedario como x, y, z. Sin embargo, se puede utilizar cualquier letra, y en este texto, las que vamos a utilizar con más frecuencia son n, k y x. La idea clave del concepto de variable es que n puede recorrer el conjunto de los enteros y tomar cualquier valor. Ahora, con la inclusión de n, podemos clasificar a los números en familias, describiendo los patrones, relaciones y propiedades que estas tengan. Esto es algo que ya habían hecho los pitagóricos, pero gracias a la notación moderna, podemos ser más formales y extender estas ideas aún más.

Operaciones con Variables

Suma:

$$1n + 1n = (1+1)n = 2n \qquad 2n + 3n = (2+3)n = 5n$$

Resta:

$$1n - 1n = (1-1)n = 0n = 0 \qquad 5n - 3n = (5-3)n = 2n$$

Multiplicación:

$$1n \times 1n = (1\times1)(n \times n) = (1^2)(n^2) = 1^2n^2$$

Observación: El coeficiente 1 se suele omitir por lo que 1n = n.
La notación paréntesis es otra forma de denotar la multiplicación.

$$(1)(2) = 1(2) = 1\times2$$

Exponentes en Variables

Exponente:

$$\mathrm{n}^1 = n \qquad \mathrm{n}^2 = n \times n \qquad \mathrm{n}^3 = n \times n \times n$$

Suma:

$$\mathrm{n}^1 \times n^1 = n^{1+1} = n^2 \qquad \mathrm{n}^3 \times n^2 = n^{3+2} = n^5$$

Multiplicación:

$$(\mathrm{n}^1)^1 = n^{1\times 1} = n^1 \qquad (\mathrm{n}^2)^2 = n^{2\times 2} = n^4$$

Números Naturales

$$\mathrm{N} = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,...$$

El conjunto de los números naturales, denotado por N, son los números que usamos para contar. Donde la inclusión o exclusión del 0 se puede hacer, pero la definición de números naturales que trabajaremos incluirá el 0, y esta inclusión tomará importancia en posteriores capitulos del libro.

Podemos hacer uso de la notación variable para expresar la regla general que rige a los números naturales, que es la propia n. Recordemos que los números naturales son abstracciones de agrupaciones de unos. Por ejemplo: 1 = 1, 2 = 1 + 1, 3 = 1 + 1 + 1, 4 = 1 + 1 + 1 + 1.

$$\mathrm{n} = 1 + 1 + 1 + ... + 1 \text{ (donde se suman n veces)}$$

Números Impares

$$\text{Impares} = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,...$$

El conjunto de números impares es un subconjunto del conjunto de números naturales. Haciendo uso de la notación variable, podemos expresar la regla general que los rige:

$$2\mathrm{n} - 1 = \text{enésimo-impar}$$

El concepto de ‘enésimo’ está construido sobre el concepto de variable. Recordemos que la idea clave es que n puede recorrer todos los números dentro de un conjunto. Cuando nos referimos al enésimo impar, decimos que (2n - 1) puede tomar cualquier valor dentro del conjunto de los números impares, gracias a la regla general que profundizaremos más adelante.

Para generar los números impares, simplemente sustituimos n en (2n – 1) por los números naturales.

Ejemplos:

$$2(1) - 1 = 2 - 1 = 1 \qquad 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$$
$$2(3) - 1 = 6 - 1 = 5 \qquad 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$$
$$2(5) - 1 = 10 - 1 = 9 \qquad 2(6) - 1 = 12 - 1 = 11$$

Números Pares

$$\text{Pares} = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18,...$$

El conjunto de números pares al igual que los impares es un subconjunto del conjunto de números naturales. Haciendo uso de la notación variable, podemos expresar la regla general que los rige:

$$2\text{n} = \text{enésimo-par}$$

Para generar los números pares, simplemente sustituimos n en (2n) por los números naturales.

Ejemplos:

$$2(1) = 2 \qquad 2(2) = 4 \qquad 2(3) = 6$$
$$2(4) = 8 \qquad 2(5) = 10 \qquad 2(6) = 12$$

Las dos reglas generales (2n – 1) y (2n) se estudiaran con mayor profundidad en capítulos posteriores.

Números Cuadrados & Números Cúbicos

Las últimas secuencias de números que veremos son los cuadrados y cúbicos, que son de suma importancia para el desarrollo de secuencias más complejas.

Números Cuadrados

$$\text{Cuadrados} = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,...$$

Los números cuadrados son los números que se multiplican por si mismo o en otras palabras con exponente 2. Haciendo uso de la notación variable, podemos expresar la regla general que los rige:

$$\text{n}^2 = enésimo - cuadrado$$

Ejemplos:

$$1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4 \qquad 3^2 = 9 \qquad 4^2 = 16 \qquad 5^2 = 25 \qquad 6^2 = 36$$

Números Cúbicos

$$\text{Cúbicos} = 1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,...$$

Los números cúbicos son los números que se multiplican por si mismo dos veces o en otras palabras con exponente 3. Haciendo uso de la notación variable, podemos expresar la regla general que los rige:

$$\mathrm{n}^3 = enésimo - cúbico$$

Ejemplos:

$$1^3 = 3 \qquad 2^3 = 8 \qquad 3^3 = 27 \quad 4^3 = 64 \quad 5^3 = 125 \quad 6^3 = 216$$

Notación Sucesión

Las sucesiones tienen como dominio los números naturales y su rango cualquier otro conjunto de números, y se rigen por una regla general.

$$\{\mathrm{a}_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$$

Donde:

-$\{\mathrm{a}_n\}$ el conjunto de términos de la sucesión
-a_n es el enésimo-término de la sucesión
-a_1 es el primer término de la sucesión

Ejemplo:

(1) Definimos la regla que seguirá nuestra sucesión

$$\mathrm{a}_n = 2n$$

(2) Sustituimos la n en (2n) con los números naturales

$$2(1) = 2,\ 2(2) = 4,\ 2(3) = 6,\ 2(4) = 8,\ 2(5) = 10$$

(3) Haciendo uso de la Notación Sucesión ahora podemos escribir nuestra sucesión

$$\{2\mathrm{n}\} = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ ...,\ 2\mathrm{n}$$

(4) Identificar los elementos de nuestra sucesión

-$\{2\mathrm{n}\}$ es el conjunto de términos de nuestra sucesión
-2n es el enésimo-término de nuestra sucesión
-2 es el primer término de nuestra sucesión

Observación: Los subíndices $\mathrm{a}_{(i)}$ se usan para expresar una relación con la variable.

Notación Suma Parcial

La enésima suma parcial es la suma de los primeros n términos de una sucesión.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n$$

Donde:

-S_n es la enésima suma parcial
-a_1 es el primer término de la sucesión
-a_n es el enésimo término de la sucesión

Casos Particulares

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$
$$\vdots$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-1}$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Ejemplo:

Dada la sucesión $\{2n\}$ calcular S_5

(1) Primero calculamos los primeros 5 términos de la sucesión

$$\{a_5\} = 2, 4, 6, 8, 10$$

(2) Sumamos los términos obtenidos

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

(3) Escribimos el resultado con la notación suma parcial

$$S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

Observación: a_{n-1} y a_{n+1} se usan para denotar el término que antecede o precede a a_n. De manera Análoga igual con S_{n-1} y S_{n+1}.

Capítulo 1

La llave dorada del numero uno

"El número 1 escondió una llave que abre la puerta que resguardada el mundo de los números, donde se atesoran los más grandes enigmas."

Me gustaría reflexionar sobre los números naturales. Estos números, que hoy en día nos parecen tan normales y que manipulamos desde pequeños para pedir dulces o juguetes, no siempre fueron así. Hace miles de años, todo comenzó cuando necesitábamos contar los animales que teníamos para saber si algún lobo se había comido alguno de ellos. Sin embargo, el método de contar con los dedos nos llevaba mucho tiempo y tardábamos en responder la cantidad de animales que teníamos. Por eso, nos vimos en la necesidad de representar el proceso de contar mediante los números naturales. Así, el número 20 indicaba que habíamos contado 20 veces los dedos de la mano. A este proceso se le llama abstracción, donde no cambia la manera de contar, sino la forma en que transmitimos el resultado final.

Números Naturales

Una de las propiedades que tienen los números naturales es la diferencia constante entre términos consecutivos:

$$a_n - a_{n-1} = 1$$

Ejemplos:

$$1 - 0 = 1 \qquad 2 - 1 = 1 \qquad 3 - 2 = 1 \qquad 4 - 3 = 1$$

Suma de Números Naturales

La suma parcial de los números naturales es el tema central de este capítulo y es necesario para poder profundizar en otros problemas que surgen a partir de él. Exploraremos dos enfoques para resolver este problema: el primero se centra en las diferencias constantes, y el segundo en las estructuras de los impares y pares.

Enfoque (Carl Friedrich Gauss)

En 1787, cuando Gauss asistía a la escuela primaria, un profesor de matemáticas les impuso un castigo a los alumnos: debían sumar todos los números naturales del 1 al 100. El pequeño Gauss con tan solo 9 años, fue el primero en entregar la respuesta 5050.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + .. + 100 = 5050$$

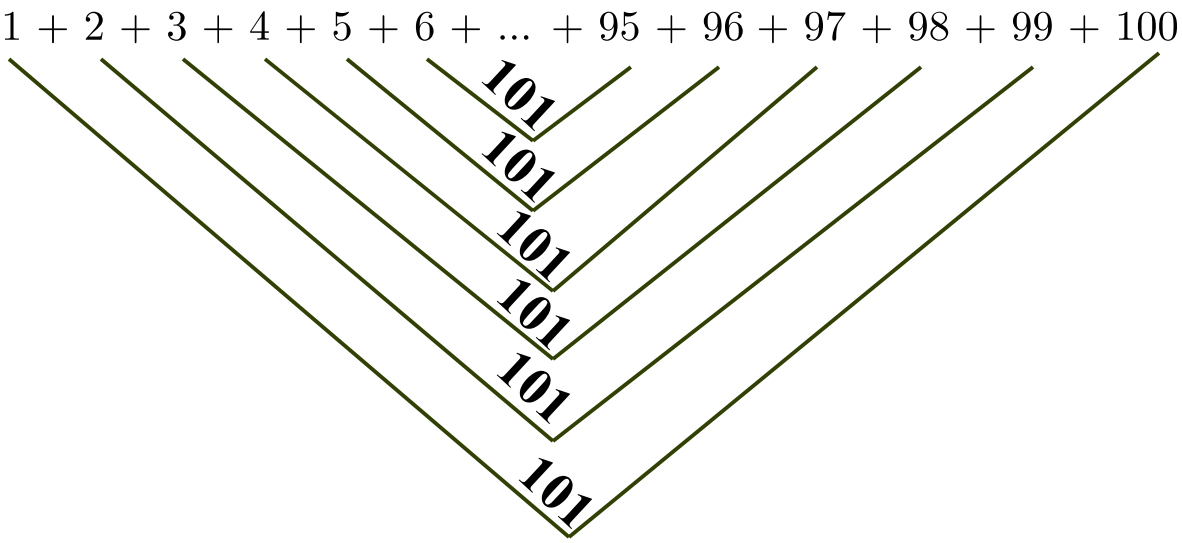
¿Como Gauss respondió tan rápido a un problema tan tedioso?

Es una pregunta que cualquiera se haría si hubiera presenciado tal hazaña que asombró hasta al maestro y compañeros de Gauss. Pero realmente, ¿qué hay detrás del razonamiento de Gauss que le valió para responder tan rápido?.

El razonamiento de Gauss es el siguiente:

Sumar Parejas de Números Extremos

las parejas se forman tomando números extremos del lado izquierdo y del lado derecho



Gauss se percató de que emparejando los números extremos y sumándolos, el resultado siempre daba 101. Como el problema inicialmente plantea la suma de los primeros 100 números naturales, Gauss había formado 50 parejas. Para responder finalmente el problema, solo tenía que multiplicar (101 × 50), que es una operación más manejable que sumar cada número uno a uno.

$$101 \times 50 = 50(100 + 1) = 100 \times 50 + 1 \times 50 = 5000 + 50 = 5050$$

Este mismo enfoque se puede usar para sumar 200, 250, 355, 1000 números naturales y seguirá funcionando para casos particulares. Pero, ¿qué pasa si queremos sumar los primeros n números naturales ? ¿Seguirá funcionando?.

Generalización del Enfoque de Gauss

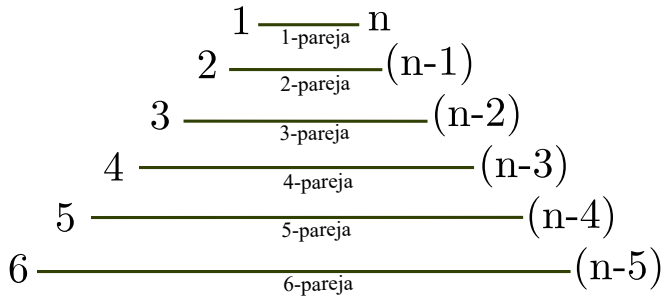
Este enfoque se puede extender para calcular la enésima suma parcial de números naturales, lo que nos permitirá calcular la suma de números naturales hasta un número n.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + n$$

Podemos visualizar las sumas de las parejas de números extremos de la siguiente forma:

1	2	3	4	⋯	(n-3)	(n-2)	(n-1)	n
+	+	+	+	⋯	+	+	+	+
n	(n-1)	(n-2)	(n-3)	⋯	4	3	2	1
(n+1)	(n+1)	(n+1)	(n+1)		(n+1)	(n+1)	(n+1)	(n+1)

Lo primero que notamos es que la suma entre números extremos se mantiene constante hasta n. Este hecho se puede demostrar que es verdad basándonos en la propiedad de diferencias constantes. Ya que no hay cambios bruscos entre números consecutivos, podemos llegar a la conclusión de que esto se ha de cumplir para todos los números naturales.



Por lo que ahora podemos generalizar, la suma de números extremos siempre dará como resultado (n + 1) y de igual manera el número de parejas está dado por (n / 2).

Fórmula

Para hacer la fórmula que genere las enésimas sumas parciales de los números naturales, tenemos que multiplicar ambos componentes, como en los casos particulares de lo que obtenemos:

$$\mathrm{C}_1 = n + 1 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{C}_2 = n \div 2$$

$$\mathrm{C}_1 \times C_2 = (n + 1) \times (n \div 2) = [\mathrm{n}(\mathrm{n} + 1)] \div 2$$

$$\mathrm{S}_n = [n(n + 1)] \div 2$$

Casos Particulares

Probaremos que la formula de los resultados esperados calculando algunos casos particulares de S_n:

$$S_1 = [1(1+1)] \div 2 = [1(2)] \div 2 = 2 \div 2 = 1$$

$$S_2 = [2(2+1)] \div 2 = [2(3)] \div 2 = 6 \div 2 = 3$$

$$S_3 = [3(3+1)] \div 2 = [3(4)] \div 2 = 12 \div 2 = 6$$

$$S_4 = [4(4+1)] \div 2 = [4(5)] \div 2 = 20 \div 2 = 10$$

$$S_5 = [5(5+1)] \div 2 = [5(6)] \div 2 = 30 \div 2 = 15$$

Conociendo los valores que S_n toma para (n = 1, 2, 3, 4, 5), contrastaremos estos con las respectivas sumas de números naturales:

$$S_1 = 1 = 1 = 1$$
$$S_2 = 3 = 1 + 2 = 3$$
$$S_3 = 6 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$S_4 = 10 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$S_5 = 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Habiendo pasado la prueba de los casos particulares, comprobamos que el razonamiento de Gauss y su generalización son correctos para todos los números naturales.

Ejercicios:

(1) En el mundo de los números, el 8 es vecino de los números cuadrados. Puedes encontrar cuál es la suma de los 3 primeros vecinos cuadrados de 8.
(Pista: el 8 se puede multiplicar para recorrer la recta numérica)

(2) Un caballo solo come una cantidad de n^2 manzanas al día, de las cuales algunas son rojas y verdes. Si en el día 7 el caballo come $7^2 = 49$ manzanas y sabemos que la suma de las manzanas rojas es 21 y las verdes 28, tenemos que (21 + 28 = 49), encuentra la suma de manzanas verdes y rojas que el caballo comió si las sumamos desde el día 1 hasta el 7.
(Pista: las manzanas siguen un patrón)

(3) 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 + 13 + … + 97 + 98 + 100.

(4) 5 + 10 + 15 + 20 + … + 500.

(5) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + … + 151.

(6) Encuentra la suma de los números que son múltiplos de 3 o 5 entre 1 y 1000.

Notación Fórmula

Una fórmula es una función racional donde el numerador es un polinomio y el denominador es un número natural. El dominio de esta fórmula está restringido al conjunto de los números naturales, y el rango es el conjunto de todos los posibles resultados de la función cuando se aplica a este dominio.

Ejemplo:

La Fórmula de los Números Triangulares

$$\mathrm{T(n)} = [\mathrm{n(n + 1)}]\div 2$$

Casos particulares T(n)

$$\mathrm{T(1)} = 1, \mathrm{T(2)} = 3, \mathrm{T(3)} = 6, \mathrm{T(4)} = 10, \mathrm{T(5)} = 15, \mathrm{T(6)} = 21,...$$

Caso especial T(n-1)

$$\mathrm{T(n\text{-}1)} = [\mathrm{(n - 1)((n - 1) + 1)}]\div 2 = [\mathrm{n(n - 1)}]\div 2$$
$$\mathrm{T(1)} = 0, \mathrm{T(2)} = 1, \mathrm{T(3)} = 3, \mathrm{T(4)} = 6, \mathrm{T(5)} = 10, \mathrm{T(6)} = 15,...$$

Caso especial T(n+1)

$$\mathrm{T(n{+}1)} = [\mathrm{(n + 1)((n + 1) + 1)}]\div 2 = [\mathrm{(n + 1)(n + 2)}]\div 2$$
$$\mathrm{T(1)} = 3, \mathrm{T(2)} = 6, \mathrm{T(3)} = 10, \mathrm{T(4)} = 15, \mathrm{T(5)} = 21, \mathrm{T(6)} = 28,...$$

Para denotar una fórmula, podemos usar cualquier letra o símbolo, pero usualmente usaremos letras que estén relacionadas con la secuencia numérica con la que trabajemos y, por lo regular, la variable que usaremos es n.

Puede parecer que ya terminamos con los números naturales. El razonamiento de Gauss, que es válido, suele esconder patrones interesantes que nos permitirán extender aún más la teoría para poder llegar a dar soluciones a problemas que tienen patrones no triviales.

Estructuras de los Impares y Pares

En la introducción, expuse ambas fórmulas, pero no profundicé en la importancia de explorar estas estructuras. Es relevante entender que cualquier número es impar o par, ya que esto nos permitirá comprender el comportamiento de cualquier serie numérica. Además, al estudiar estas estructuras, descubriremos fórmulas individuales con relaciones muy interesantes que nos permiten calcular otras secuencias numéricas.

Números Naturales

Podemos expresar cualquier número natural en la forma (2n - 1) o (2n), de donde obtenemos las siguientes dos tablas:

$2(1)$ - $1 = 1$	$2(1) = 2$
$2(2)$ - $1 = 3$	$2(2) = 4$
$2(3)$ - $1 = 5$	$2(3) = 6$
$2(4)$ - $1 = 7$	$2(4) = 8$
$2(5)$ - $1 = 9$	$2(5) = 10$

También el 0 como $2(0) = 0$.

Suma de Números Naturales

Cómo podemos expresar cualquier número en una de las dos formas. También podemos sumarlos, donde solo se suma la variable en c(x) y la constante c solo si esta no está multiplicada por una variable. De aquí obtenemos la siguiente tabla:

x	++x	c	++c
1	1	-1	-1
1	2	0	-1
2	4	-1	-2
2	6	0	-2
3	9	-1	-3
3	12	0	-3
4	16	-1	-4
4	20	0	-4

Donde:

-x es la variable en [2n - 1] y [2n]

-++x es la suma acumulativa de los valores de x

-c es la constante en [2n - 1] y [2n]

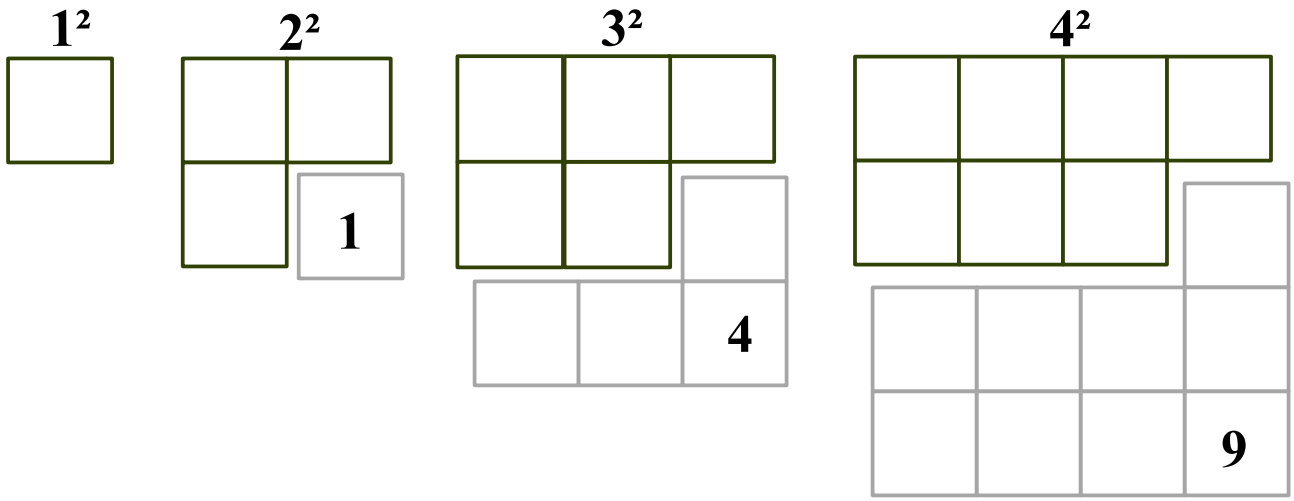
-++c es la suma acumulativa de los valores de c

De donde obtenemos dos tablas individuales para ambas fórmulas, donde podemos observar mejor los patrones que subyacen en cada una de las estructuras.

Tabla Impar [2n - 1]

x	++x	c	++c
1	1	-1	-1
2	4	-1	-2
3	9	-1	-3
4	16	-1	-4

Lo primero que podemos observar en esta tabla es que (++c) es una consecuencia de la estructura de los impares. Lo segundo es un claro patrón en (++x), que son cuadrados. Esta es una propiedad de los impares, donde la suma acumulativa de n impares es igual al enésimo cuadrado. Podemos visualizar esta propiedad de la siguiente forma:



Los cuadrados de color negro representan el enésimo número impar, mientras que los cuadrados de color gris representan la suma de los primero (n - 1) números impares. Para completar el cuadrado, solo se suma el enésimo número impar. Por lo tanto, concluimos que la suma de los primeros n números impares es igual al enésimo cuadrado.

Fórmula

La fórmula para calcular el enésimo término impar triangular, es decir, los valores impares de n en T(n), está dada por la suma de los dos componentes(++x y ++c):

$$C_1 = n^2 \quad \text{y} \quad C_2 = -n$$

Recordar que (++x) está multiplicado por 2; por lo tanto, la fórmula general quedaría así:

$$\mathrm{T(2n\text{-}1)} = 2\mathrm{C}_1 + C_2 = 2\mathrm{n}^2 + (-n) = 2n^2 - n$$

$$\mathrm{T(2n\text{-}1)} = 2\mathrm{n}^2 - n$$

Casos Particulares

$$\mathrm{T}(1) = 2(1^2) - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$\mathrm{T}(3) = 2(2^2) - 2 = 8 - 2 = 6$$
$$\mathrm{T}(5) = 2(3^2) - 3 = 18 - 3 = 15$$
$$\mathrm{T}(7) = 2(4^2) - 4 = 32 - 4 = 28$$
$$\mathrm{T}(9) = 2(5^2) - 5 = 50 - 5 = 45$$

Tabla Par [2n]

x	++x	c	++c
1	2	0	-1
2	6	0	-2
3	12	0	-3
4	20	0	-4

Lo primero que podemos observar es que c no tiene ninguna injerencia en (++c), como era de esperar, ya que el 0 es el elemento neutro en la suma. Lo segundo que podemos ver es una divisibilidad por 2 en los valores de (++x) que dan como resultado los números triangulares:

$$2 \div 2 = 1,\ 6 \div 2 = 3,\ 12 \div 2 = 6,\ 20 \div 2 = 10$$

Fórmula

La fórmula para calcular el enésimo término par triangular, es decir, los valores pares de n en T(n), está dada por la suma de los dos componentes(++x y ++c):

$$\mathrm{C}_1 = 2[[n(n+1)] \div 2] \qquad \text{y} \qquad \mathrm{C}_2 = -n$$

Recordar que ++x está multiplicado por 2; por lo tanto, la fórmula general quedaría así:

$$\mathrm{T(2n)} = 2\mathrm{C}_1 + C_2 = 2[\mathrm{n(n+1)}] + (\mathrm{-n}) = 2\mathrm{n}^2 + 2n - n = 2n^2 + n$$

$$\mathrm{T(2n)} = 2\mathrm{n}^2 + n$$

Casos Particulares

$$\mathrm{T}(2) = 2(1^2) + 1 = 2 + 1 = 3$$
$$\mathrm{T}(4) = 2(2^2) + 2 = 8 + 2 = 10$$
$$\mathrm{T}(6) = 2(3^2) + 3 = 18 + 3 = 21$$
$$\mathrm{T}(8) = 2(4^2) + 4 = 32 + 4 = 36$$
$$\mathrm{T}(10) = 2(5^2) + 5 = 50 + 5 = 55$$

Utilizar las formulas $(2\mathrm{n}^2 - n)$ y $(2n^2 + n)$ para resolver los ejercicios.

Ejercicios:

$$\mathrm{G(x)} = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \ldots + \mathrm{x}$$

$$\mathrm{G}(1) = 1 = 1$$
$$\mathrm{G}(2) = 1 + 1 = 2$$
$$\mathrm{G}(3) = 1 + 1 + 2 = 4$$

(1) Calcular G(19), G(23), G(31).

(2) Calcular G(100), G(144), G(196).

(3) Dada la sucesión $\{n^2\}$ calcular S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6.

(4) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ,,, + 16^2$.

(5) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 100^2$.

Una vez expuestos los dos enfoques y habiendo comprendido el problema de sumar los primeros n números naturales, podemos resolver los dos siguientes problemas que surgen a partir de este, que son la suma de los primeros n números impares y pares.

Suma de Números Pares

La suma de números pares está muy relacionada con los números triangulares. Esto se debe a que todo número par es divisible por 2. Por lo tanto, todos los números pares pueden expresarse de la forma (2n)**,** es decir, todo número par es múltiplo de 2. Sin embargo, esto no ocurre con los números impares. No existe ningún número diferente de 1 que divida a todos los impares.

Los números pares pueden visualizarse de la siguiente manera:

$$2(1),\ 2(2),\ 2(3),\ 2(4),\ 2(5),\ 2(6),\ 2(7),\ 2(8),\ 2(9),\ldots$$

Podemos observar que los números que multiplican al 2 son los números naturales. Recordemos que cuando queremos la suma parcial de una variable multiplicada por una constante, solo sumamos las variables y luego multiplicamos por la constante. Por lo tanto, tendremos que sumar los números naturales y después multiplicar por 2.

Fórmula

Dado que ya conocemos una fórmula para la suma de los primeros n números naturales, podemos expresar la fórmula para calcular la suma de los primeros n números pares de la siguiente forma:

$$\mathrm{C}_1 = [n(n+1)] \div 2 \text{ y } \mathrm{C}_2 = 2$$

$$\mathrm{G(n)} = \mathrm{C}_1 \times C_2 = [[n(n+1)] \div 2] \times 2 = \mathrm{n(n+1)} = \mathrm{n}^2 + n$$

$$\mathrm{G(n)} = \mathrm{n}^2 + n$$

Casos Particulares

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}(1) &= 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \\
\mathrm{G}(2) &= 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \\
\mathrm{G}(3) &= 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12 \\
\mathrm{G}(4) &= 4^2 + 4 = 16 + 4 = 20 \\
\mathrm{G}(5) &= 5^2 + 5 = 25 + 5 = 30
\end{aligned}$$

Suma de Números Impares

La suma de números impares está relacionada con los números cuadrados, como se puede ver en la ilustración de la Tabla Impar.

Fórmula

$$\mathrm{G(n)} = \mathrm{n}^2$$

Casos Particulares

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}(1) &= 1^2 = 1 \\
\mathrm{G}(2) &= 2^2 = 4 \\
\mathrm{G}(3) &= 3^2 = 9 \\
\mathrm{G}(4) &= 4^2 = 16 \\
\mathrm{G}(5) &= 5^2 = 25
\end{aligned}$$

Suma de Impares y Pares por (C. F. Gauss)

Podemos resolver estos dos problemas partiendo de la fórmula general de los números triangulares en la igualdad que se relaciona con la suma de números naturales.

Suma de Números Pares

$$[\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)] \div 2 = 1+2+3+4+5+6+\ldots+n$$

Multiplicamos por 2 los dos lados de la igualdad para formar los números pares del lado derecho:

$$\mathrm{n}(\mathrm{n}+1) = 2(1)+2(2)+2(3)+2(4)+2(5)+2(6)+\ldots+2\mathrm{n}$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad, llegamos a la fórmula anteriormente expuesta:

$$\mathrm{n}(\mathrm{n}+1) = \mathrm{n}^2 + n$$

Suma de Números Impares

$$\mathrm{n}(\mathrm{n}+1) = 2(1)+2(2)+2(3)+2(4)+2(5)+2(6)+\ldots+2\mathrm{n}$$

Restamos 1 a todos los números del lado derecho para formar los números impares, por lo que restaríamos n veces 1 a ambos lados de la igualdad:

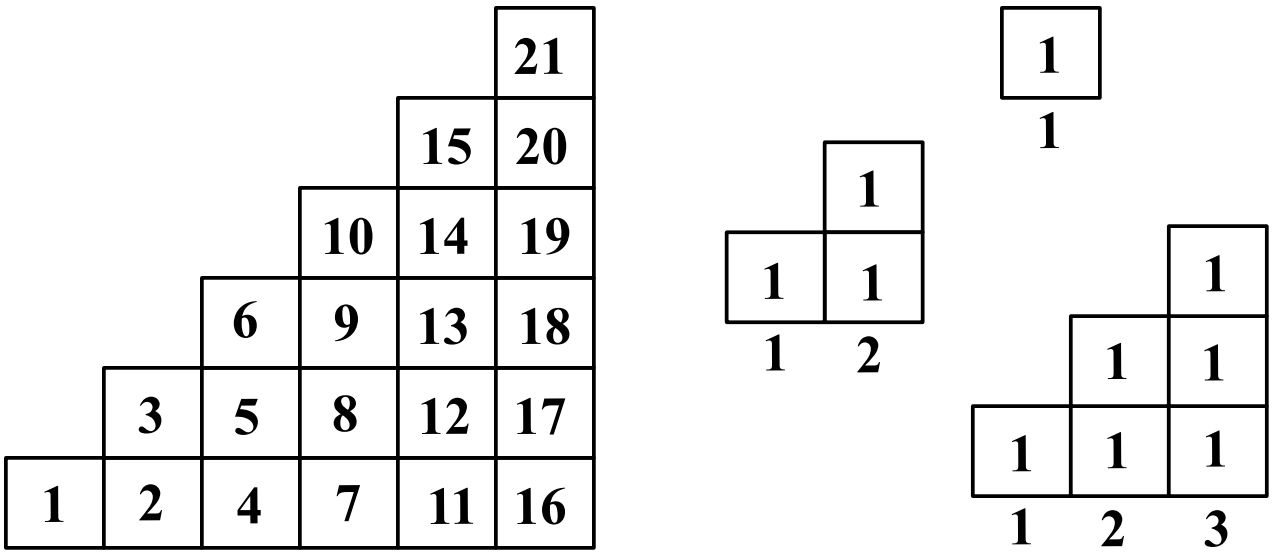
$$\mathrm{n}(\mathrm{n}+1) - \mathrm{n} = (2(1)-1)+(2(2)-1)+(2(3)-1)+\ldots+(2\mathrm{n}-1)$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad, llegamos a la fórmula anteriormente expuesta:

$$\mathrm{n}(\mathrm{n}+1) - \mathrm{n} = \mathrm{n}^2 + n - n = n^2$$

Números Triangulares

Los números triangulares (1, 3, 6, 10, 15, …) son aquellos que obtenemos al sumar parcialmente los números naturales. Hasta ahora, solo hemos explorado algunas propiedades de esta importante secuencia numérica de manera breve. Sin embargo, es fundamental profundizar en su estudio, ya que muchos problemas están relacionados con ella. Comprender cómo se vincula con otras secuencias numéricas nos permitirá ver que no es una secuencia aislada, sino un bloque con el que podemos construir estructuras más complejas. Además, nos plantea preguntas más profundas que nos ayudan a tener una visión panorámica del paisaje matemático.



Los números triangulares se pueden visualizar como escalones, donde cada escalón representa un número triangular. Esta manera de representarlos funciona a la perfección porque hay una diferencia constante entre los escalones. Cada cuadro le corresponde al número 1. Al sumar cada cuadro, obtenemos la figura abstracta con los números naturales.

Relaciones

(1) La diferencia de dos números triangulares consecutivos es igual al enésimo numero natural:

$$\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n-1} = n$$

(2) La suma de dos números triangulares consecutivos es igual al enésimo numero cuadrado:

$$\mathrm{T}_{n-1} + \mathrm{T}_n = n^2$$

(2) Los números de la forma (2k), donde k es el enésimo numero triangular, son iguales a la suma parcial de numero pares:

$$2(\mathrm{T}_n) = 0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n$$

(4) Los números de la forma (8k + 1), donde k es el enésimo número triangular, son iguales al enésimo numero cuadrado impar:

$$8(\mathrm{T}_n) + 1 = (2n - 1)^2$$

(5) Los números de la forma (8k + 4n), donde k es el enésimo número triangular y n es el enésimo número natural, son iguales al enésimo número cuadrado par:

$$8(\mathrm{T}_n) + 4n = (2n)^2$$

Algunas propiedades ya han sido expuestas en páginas anteriores; algunas otras son nuevas. Aunque estas no son todas las propiedades que tienen los números triangulares, es más que suficiente para introducirnos a capítulos posteriores donde se presentarán propiedades más profundas relacionadas con secuencias numéricas más complejas.

Patrones

Habiendo concluido la resolución de los problemas previamente planteados, como la suma de números naturales, números pares y números impares, el lector habrá observado que hemos utilizado varios enfoques para resolverlos. Ahora nos centraremos en los diferentes patrones de sumas que hemos explorado a lo largo de todo el capítulo. Esto nos ayudará a clasificar los patrones y a saber cómo podemos abordar futuros problemas.

Naturaleza Constante

El patrón de naturaleza constante es el núcleo de muchas secuencias numéricas consideradas triviales o primitivas. Además, muchos de los patrones más complejos se construyen a partir de este, por lo que podemos decir que parte del núcleo de muchas secuencias numéricas complejas está conformado por este patrón.

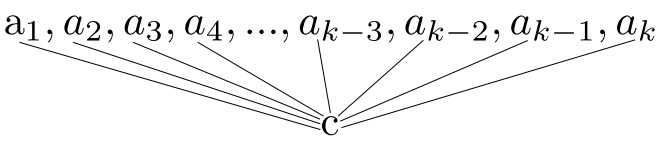
La idea de secuencias numéricas primitivas se puede ver como el inicio de los números. Una analogía que me gusta hacer es con el Big Bang: esta idea de que hay un inicio y luego todo se expande indefinidamente. Pues igual pasa con los números: en un inicio solo existía el número 1, se replica n veces y se suman cada número 1, dando vida a los números naturales. Siguiendo este mismo proceso, obtenemos las secuencias numéricas primitivas. Las demás secuencias numéricas más complejas se obtienen fusionando estas.

$$1$$

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ...\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + ... + 1 + 1 + 1 + 1$$

Los patrones de suma de naturaleza constante se pueden definir como la suma de números $\{a_k\}$, donde a_k es igual a una constante c. Por lo tanto, la diferencia entre dos números cualesquiera da como resultado 0.



La suma parcial de $\{a_k\}$ la podemos visualizar de la siguiente forma;

$$1c + 1c + ... + 1c = (1 + 1 + ... + 1)c$$

Resolviendo la suma parcial de unos dentro del paréntesis, que ya conocemos que es n, que denota el enésimo número natural. Por lo tanto, la fórmula general quedaría así:

$$c + c + ... + c = cn$$

Ejemplos:

(1) Primer Caso con $c = 0$

Sustituyendo c en la formula geneal, llegamos a la siguiente formula;

$$0 + 0 + ... + 0 = 0n = 0$$

Podemos concluir que cuando c es igual a 0, el resultado siempre es 0. Este hecho se puede comprobar porque el 0 es el elemento neutro de la suma.

(2) Segundo caso con $c = 1$

Sustituyendo c en la formula general, llegamos a la siguiente formula:

$$1 + 1 + ... + 1 = 1n = n$$

De donde obtenemos n dado que 1 es el elemento neutro de la multiplicación.

(3) Tercer caso con $c = 2$

Sustituyendo c en la formula general, llegamos a la siguiente formula:

$$2 + 2 + ... + 2 = 2n$$

A partir de este caso, ya no se pude simplificar la formula resultante, quedando de la forma c(x).

Terminado de detallar los tres casos, es más que suficiente para entender el comportamiento de los demás casos. Como podemos observar, el caso 2 y 3 son similares, pero lo interesante está en el caso 2, que son los números pares y, más específicamente, la ausencia de los números impares en este patrón. Esta cuestión será tratada en el siguiente capitulo.

La primera secuencia numérica primitiva que estudiamos hasta este punto del capítulo es la de los números naturales. Ha quedado claro que esta secuencia se construye a partir de este patrón. Las demás secuencias numéricas primitivas se pueden obtener siguiendo el mismo método que describí brevemente en páginas anteriores. En ese método, simplemente se suma la variable x en c(x).

Este patrón será estudiado con mayor profundidad, ya que todo el trabajo del libro se basa en él. Debido a su simplicidad a la hora de realizar cálculos. Por lo tanto, el objetivo principal de todos los problemas futuros se centra en poder expresar cualquier secuencia numérica en términos de secuencias numéricas primitivas. Sin embargo, no será una tarea fácil.

Aquí es donde los patrones y las relaciones son de gran importancia para llegar a esas secuencias numéricas primitivas que subyacen en las secuencias numéricas más complejas. Hasta ahora, hemos resuelto las dos primeras secuencias primitivas: los números naturales y los números triangulares. La tercera secuencia primitiva, que son los números tetraédricos, se abordará en el siguiente capítulo.

Por ahora, es más que suficiente con exponer las ideas principales y establecer la dirección que tomaremos en cuanto a cómo trataremos las secuencias numéricas.

Naturaleza Repetitiva

El patrón de naturaleza repetitiva está muy relacionado con las fórmulas individuales (valores impares y pares de n en una fórmula F cualquiera) de secuencias numéricas. Este patrón puede admitir secuencias numéricas primitivas y secuencias numéricas complejas. La motivación para aplicar este patrón a las secuencias numéricas está relacionado con muchos problemas donde existe una relación con la suma de números específicos en secuencias numéricas.

Para denotar este patrón usaremos la siguiente notación:

$$\binom{S}{S} = \mathrm{s}_1, s_1, s_2, s_2, ..., s_k, s_k$$

Donde:

-S es una secuencia numerica cualquiera
-s_1 $el\ primer\ numero\ en\ la\ secuencia\ numerica\ S$
-s_k $el\ k\ esimo\ numero\ en\ la\ secuencia\ numerica\ S$

Para aclarar el uso de esta notación, consideraremos la primera secuencia numérica en la que se utilizó este patrón.

Ejemplo:

Secuencia numérica de números naturales repetidos usando la notación:

$$\binom{n}{n} = 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,...$$

La suma parcial de los numero naturales repetidos se pude denotar usando el símbolo sigma:

$$\sum\binom{n}{n} = 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,...$$

La inclusión del símbolo sigma nos permitirá extender el concepto de suma parcial que trataremos con más detalle en capítulos posteriores.

Tabla de Números Triangulares [1-150]

1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**
28	**36**	**45**	**55**	**66**	**78**
91	**105**	**120**	**136**	**153**	**171**
190	**210**	**231**	**253**	**276**	**300**
325	**351**	**378**	**406**	**435**	**465**
496	**528**	**561**	**595**	**630**	**666**
703	**741**	**780**	**820**	**861**	**903**
946	**990**	**1035**	**1081**	**1128**	**1176**
1225	**1275**	**1326**	**1378**	**1431**	**1485**
1540	**1596**	**1653**	**1711**	**1770**	**1830**
1891	**1953**	**2016**	**2080**	**2145**	**2211**
2278	**2346**	**2415**	**2485**	**2556**	**2628**
2701	**2775**	**2850**	**2926**	**3003**	**3081**
3160	**3240**	**3321**	**3403**	**3486**	**3570**
3655	**3741**	**3828**	**3916**	**4005**	**4095**
4186	**4278**	**4371**	**4465**	**4560**	**4656**
4753	**4851**	**4950**	**5050**	**5151**	**5253**
5356	**5460**	**5565**	**5671**	**5778**	**5886**
5995	**6105**	**6216**	**6328**	**6441**	**6555**
6670	**6786**	**6903**	**7021**	**7140**	**7260**
7381	**7503**	**7626**	**7750**	**7875**	**8001**
8128	**8256**	**8385**	**8515**	**8646**	**8778**
8911	**9045**	**9180**	**9316**	**9453**	**9591**
9730	**9870**	**10011**	**10153**	**10296**	**10440**
10585	**10731**	**10878**	**11026**	**11175**	**11325**

La importancia de tener tablas de secuencias numéricas es innegable. Nos sirven para tener una mayor precisión a la hora de encontrar patrones en problemas que involucren las secuencias numéricas que ya conocemos. Además, para aproximar otras secuencias numéricas cuyos patrones no conocemos, tener una secuencia que conocemos y que tiene un comportamiento similar puede ser útil. Así, podemos partir de otro problema que probablemente sea más fácil, que es buscar patrones que nos permitan relacionar la secuencia conocida con la desconocida.

Capítulo 2

La espiral infinita

"En el mundo de los números, suelen existir espirales en las que es fácil entrar pero difícil salir.
Solo aquellos que no tengan miedo de sumergirse en lo más profundo podrán descubrir los patrones ocultos que subyacen en ellas.
Así podrán descifrar una y cada una de las infinitas espirales que esperan ser descubiertas."

Probablemente, si el lector intentó abordar el problema de la suma de cuadrados planteado en el primer capítulo, se encontró con diversos obstáculos, secuencias numéricas desconocidas y un sentimiento de frustración. Algo que es normal, porque es imposible resolver ese problema con lo proporcionado en dicho capítulo. Hasta aquí, se podría preguntar entonces, ¿cuál es el porqué de ese problema si no se tienen las herramientas correctas para poder abordarlo de una manera satisfactoria? El motivo por el que propuse este problema en el primer capítulo fue para forzar al lector a tener un trato más natural con las secuencias más complejas y los patrones que estas resguardan. Este capítulo se podría ver como lo opuesto al capítulo 1, es decir, el orden y el caos. Los dos problemas que estudiaremos a profundidad en este capítulo son la suma de números cuadrados y los números tetraédricos, explorando los patrones y relaciones que surgen a partir de estos.

Suma de Números Cuadrados

Después de haber resuelto los problemas planteados en el primer capítulo, es natural pensar que el siguiente problema que sigue es la suma de números cuadrados, lo cual es correcto. Sin embargo, la diferencia de dificultad en comparación con la suma de números naturales es muy grande. Esto radica en que la fórmula para la primera secuencia primitiva es igual a la fórmula de la suma de números naturales. Esto ya no va a pasar para las sumas de segundas, terceras, cuartas, etc., potencias, por lo que se vuelve una tarea cada vez más desafiante cuando tenemos valores en exponentes cada vez mayores. El enfoque que tomaremos para resolver este problema es igual al que tomamos en la suma de números naturales, entendiendo las estructuras de números impares y pares. Es aquí la primera vez que se puede ver la importancia de este enfoque, ya antes expuesto en el primer capítulo, porque hay dos líneas que podrías tomar para resolver este problema. Pero la propiedad de los números triangulares que los relaciona con el enésimo número cuadrado, la cual profundizaremos en capítulos posteriores, será parte fundamental para el desarrollo de este libro.

Estructura de números impares

En el capítulo anterior, profundizamos en esta estructura y dedujimos una de las muchas relaciones que tiene esta secuencia numérica. Específicamente, la suma de los primeros n números impares es igual al enésimo número cuadrado. Esto nos permite expresar los números cuadrados mediante esta estructura.

Números cuadrados expresados de la forma $(2\times T_n - n)$

$2(1) - 1 = 1^2$	$2(3) - 2 = 2^2$
$2(6) - 3 = 3^2$	$2(10) - 4 = 4^2$
$2(15) - 5 = 5^2$	$2(21) - 6 = 6^2$
$2(28) - 7 = 7^2$	$2(36) - 8 = 8^2$
$2(45) - 9 = 9^2$	$2(55) - 10 = 10^2$

Para obtener la suma de los primeros n números cuadrados, tenemos que resolver la suma de las variables que son los números triangulares y los números naturales. Las dos secuencias ya nos son conocidas, solo que es la primera vez que nos vemos en la necesidad de encontrar la fórmula para la suma de los primeros n números triangulares.

Suma de Números Triangulares

La suma de números triangulares es igual de desafiante que la suma de números cuadrados. Esto se debe a que la estructura de los números triangulares $(n^2 + n)/2$ incluye números cuadrados. Es decir, para encontrar la fórmula de la suma de los números triangulares, se necesita encontrar primero la fórmula de la suma de los números cuadrados, llegando así a un problema que pareciera no tener solución. Dado que las dos sumas se necesitan mutuamente y dado que comprobamos que no podemos llegar a ninguna de las dos mediante el estudio de sus estructuras, es aquí cuando retomamos las secuencias primitivas para estudiarlas con una mayor profundidad que en el Capítulo 1.

Secuencias Numéricas Primitivas

Las secuencias numéricas primitivas surgen a partir del patrón de suma de naturaleza constante que posee propiedades que nos ayudarán a resolver o avanzar en muchos problemas donde se ven involucradas estas secuencias. En esta ocasión, la secuencia involucrada son los números tetraédricos que se construyen a partir de la suma de números triangulares.

Rectángulo Pascal-Tartaglia

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

Podemos observar mejor cómo se construye cada secuencia en el rectángulo, donde cada columna es la suma acumulativa de la anterior y cada número es igual a la suma del número que le antecede en la fila y el número que le antecede en la columna.

Formulas

$$\frac{n}{1!}$$ Números Naturales

$$\frac{n(n+1)}{2!}$$ Números Triangulares

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$ Números Tetraédricos

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$ Números Pentatetricos

$$\frac{n^0}{0!}$$ Números Unos

Donde:

$n^0 = 1$

$0! = 1$

Observando las fórmulas, nos podemos percatar de que hay un patrón claro que siguen tanto el numerador como el denominador. Algo que sería muy difícil de notar si solo dispusiéramos de las dos primeras fórmulas. Gracias al conocimiento matemático acumulado por generaciones, nos es fácil actualmente.

Generalización del Patrón

$$\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)\times \ldots \times (n+k)}{(\mathrm{k}+1)!}$$

Donde:

-$\mathrm{k} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., \mathrm{k}\}$

-n es el enésimo número a calcular en la secuencia

En la fórmula se omite k = 0 tal que (n + 0) = n. Habiendo generalizado el patrón, disponemos de una herramienta matemática muy poderosa que nos acompañará durante todo el desarrollo del libro. Otro de los temas de las secuencias primitivas es que son infinitas y ponerles nombre a cada una de ellas es una tarea que no tiene mucho sentido, más que solo a las primeras. Es aquí donde la notación sigma será de gran importancia para abstraer estas fórmulas y extender aún más la teoría y conceptos.

Antes de introducir la notación sigma en las secuencias numéricas primitivas, es necesario retomar y comprender varios conceptos que estudiamos en el primer capítulo. Estos son importantes a la hora de ir hilando todos los conceptos e ideas para comprender la abstracción final que los unifica mediante la introducción de nuevos símbolos.